

TD 1

Exercice 1 : La sensibilité des écarts de revenu aux différences de taux de croissance

Tableau 1. Evolution du revenu par tête (en dollars constants, base 1985)

	1820	1989	multiple
France	1 052	13 837	× 13,2
Allemagne	937	13 989	× 14,9
Royaume-Uni	1 405	13 468	× 9,6
Etats-Unis	1 048	18 317	× 17,5
Japon	588	15 101	× 25,7
Italie	960	12 955	× 13,5

1) Les taux de croissance annuels moyens des différents pays apparaissant dans le tableau 1 sont définis par :

$$g = \left(\frac{y_{1989}}{y_{1820}} \right)^{\frac{1}{169}} - 1$$

et l'on obtient, en pourcentage :

France	Allemagne	Royaume-Uni	Etats-Unis	Japon	Italie
1,54	1,61	1,35	1,71	1,94	1,55

2) Sur la base de son taux de croissance annuel moyen g , il faut à un pays, pour doubler sa production par tête, un nombre d'années T tel que $y_T = 2 \times y_0$, soit $(1 + g)^T = 2$, soit encore :

$$T = \frac{\ln 2}{\ln(1 + g)}$$

Ceci donne, pour les pays du tableau 1 :

France	Allemagne	Royaume-Uni	Etats-Unis	Japon	Italie
45,4	43,4	51,7	40,9	36,1	54,1

3) Si le taux de croissance annuel moyen des Etats-Unis avait été inférieur de 1 point au taux effectif, soit 0,71% par an au lieu de 1,71%, le PIB par tête en 1989 aurait été :

$$y_{1989} = (1 + 0,0071)^{169} \times y_{1820} \simeq y_{1820} \times 3,31 \simeq 3464\$$$

au lieu de 13 837\$.

4) Le taux de croissance annuel moyen entre 1820 et 1989 qui aurait permis à la France d'atteindre le niveau de revenu par tête des Etats-Unis en 1989 est g tel que :

$$18317 = (1 + g)^{169} \times 1052 \Leftrightarrow g = \left(\frac{18317}{1052} \right)^{\frac{1}{169}} - 1 = 1,70\% \text{ par an}$$

Exercice 2 : PIB par tête et l'IDH

1) Calcul de l'IDH

PIB par tête et IDH 2001, France et Chine

	Espérance de vie	Taux d'alphabétisation des adultes	Taux de scolarisation (tous niveaux)	PIB réel par tête (PPA)
France	78,7	99 %	91 %	23 990
Chine	70,6	85,8 %	64 %	4 020

a) Indice d'espérance de vie :

$$I_1 = \frac{\text{espérance de vie à la naissance} - 25}{85 - 25}$$

25 ans et 85 ans étant considérés comme les valeurs minimale et maximale.

b) Indice de niveau d'éducation :

$$I_2 = \frac{1}{3} (2 \times \text{taux d'alphabétisation des adultes} + 1 \times \text{taux de scolarisation tous niveaux})$$

3) Indice de PIB réel par tête corrigé :

$$I_3 = \frac{\ln \text{PIB réel par tête} - \ln 100}{\ln 40\ 000 - \ln 100}$$

100 et 40 000 étant les valeurs minimale et maximale.

4) Indicateur du développement humain :

$$IDH = \frac{1}{3} (I_1 + I_2 + I_3)$$

Les résultats des calculs sont dans le tableau suivant :

	I_1	I_2	I_3	IDH
France	0,895	0,963	0,915	0,925
Chine	0,760	0,785	0,617	0,721

2) Commentaire du tableau : insister sur les différences de classement selon le PIB par tête et l'IDH. Ces différences ne sont pas très importantes pour les pays du haut et du

bas du tableau : un niveau très élevé de PIB par tête s'accompagne de niveaux élevés de santé et d'éducation, de même qu'un niveau très faible de PIB par tête s'accompagne de mauvaises conditions sanitaires et d'un niveau d'éducation très bas. Les différences sont importantes pour les pays pétroliers (cf. les Emirats Arabes Unis dans le tableau) dans un sens, qui ont un PIB par tête très élevés mais des niveaux de scolarisation faibles, et pour les pays socialistes ou anciennement socialistes (cf. Cuba et l'Ukraine) dans l'autre sens, qui ont un PIB par tête faible mais des niveaux de scolarisation très élevés. L'Afrique du Sud ne se range dans aucune de ses catégories, mais ses caractéristiques très particulières entraînent une divergence spécialement importante entre les deux indicateurs.

TD 2

Question du texte 3

Gilbert Cette in Productivité et croissance, Rapport du Conseil d'Analyse Economique 2004.

La décomposition comptable est

$$\frac{Y}{Pop} = \frac{Y}{Nh} h \frac{N}{Popact} \frac{Popact}{Popenage} \frac{Popenage}{Pop}$$

$$\text{PIB/hab} = \frac{\text{Productivité}}{\text{horaire}} \times \frac{\text{Durée}}{\text{du travail}} \times (1 - u) \times \frac{\text{taux de}}{\text{participation}} \times \frac{\text{un facteur}}{\text{démographique}}$$

les variables étant la production, la population, l'emploi, la durée annuelle du travail, la population active, la population en âge de travailler. Le taux de chômage est u . Le taux d'emploi est égal à $(1 - u)$ fois le taux d'activité.

Le tableau suivant donne les grandeurs relatives :

	PIB/hab	productivité horaire	durée du travail	tx de particip.	tx d'emploi	tx de chômage
France	77	103	1545	68	61,1	8,7
USA	103	100	1815	76,4	71,9	5,8
France/USA	0,75	1,03	0,85	0,89	0,85	

La plus faible durée du travail (à la fois hebdo et annuelle : les 35h et les 5 semaines) explique un écart de 15%.

Le plus faible taux d'emploi (les jeunes et les retraités à 60 ans, mais aussi le faible taux d'emploi des seniors de 55 à 60 ans) explique aussi 15%.

L'influence du taux de chômage est faible. C'est le taux d'activité (ou de participation) qui compte.

Rq : Il y a sans doute une petite erreur dans le texte. On ne voit pas comment un tx de cho de 8,7 et un taux de participation de 68 donne un taux d'emploi de 61,1.

Une approche comptable est insuffisante car les différentes variables ne sont pas indépendantes. Le fait qu'on travaille moins en France conduit à une productivité horaire du travail plus élevée. Le fait que le taux d'emploi soit moins élevé a un effet identique. On peut penser que les travailleurs qui ne sont pas employés ont une productivité plus faible que ceux qui sont employés. Un plus faible tx d'emploi en France signifie donc des travailleurs en moyenne plus productifs.

Admettons que la production est $Y = qhN$ où la productivité horaire q dépend négativement de h et N .

On a $\frac{dY}{Y} = -0,35\frac{dh}{h} - 0,5\frac{dN}{N}$ ou encore, comme le dit le texte,

$$\left(\frac{dY}{Y} - \frac{dN}{N}\right) = \left(\frac{dq}{q} + \frac{dh}{h}\right) = 0,65\frac{dh}{h} - 0,5\frac{dN}{N}.$$

Si, par rapport aux USA, $\frac{dh}{h} = \frac{dN}{N} = -0,15$, on obtient $\frac{dq}{q} = 0,85 \times 0,15 = 0,13$. La productivité horaire devrait donc être supérieure de 13% en France. Comme elle ne l'est que de 3%, c'est que nous avons un handicap structurel de l'ordre de 10% (technologies moins modernes, secteurs moins modernes).

La question ultime est de savoir si la France préfère travailler moins en ayant un revenu par tête plus faible.

Exercice : la place des Technologies de l'Information et de la Communication dans la croissance

1. Ne pas confondre K_T le capital traditionnel utilisé dans le secteur de nouvelles technologies et J le capital technologique utilisé dans les deux secteurs.

Chaque type de capital est transférable entre les deux secteurs.

2. Dans une relation additive comme $\dot{K} = I_S - \mu_S K$ tous les termes doivent croître au même taux. En outre, en régime permanent, K et \dot{K} doivent croître au même taux.

Les variables qui croissent au taux g_S sont donc K , K_S , K_T , I_S , Y_S , C_S . Celles qui croissent au taux g_T sont J , J_S , J_T , I_T , Y_T , C_T .

Par ailleurs, L_S et L_T croissent au même taux, n .

3. On a

$$w = p_S A_S \partial F_S / \partial L_S = p_T A_T \partial F_T / \partial L_T$$

soit

$$w = p_S \alpha_S \frac{Y_S}{L_S} = p_T \alpha_T \frac{Y_T}{L_T}$$

On a

$$\frac{p_S Y_S}{p_T Y_T} = \frac{\alpha_T L_S}{\alpha_S L_T}$$

En croissance régulière L_S/L_T est constant. Le partage en valeur de la production l'est donc.

Le taux de croissance du prix relatif des biens technologiques $g_P = g_{pT} - g_{pS}$ est donc égal à $g_S - g_T$.

Rq. On a des relations analogues pour les autres facteurs. Si r_K représente le loyer du capital traditionnel on a

$$r_K = p_S A_S \partial F_S / \partial K_S = p_T A_T \partial F_T / \partial K_T$$

soit

$$r_K = p_S \alpha_S \frac{Y_S}{K_S} = p_T \alpha_T \frac{Y_T}{K_T}$$

Ceci est compatible avec la relation précédente.

4. Cette relation implique, en croissance de long terme,

$$g_T - g_S = -\sigma g_P = -\sigma (g_S - g_T)$$

Ceci n'est possible que si $\sigma = 1$.

Ceci est donc une condition nécessaire pour qu'une croissance équilibrée existe.

L'idée générale est que des taux de progrès technique différents dans les deux secteurs conduisent a priori à une déformation de la structure productive en valeur. Il n'y a aucune raison que la croissance de long terme soit équilibrée. Pensez au partage agriculture, industrie, services.

L'évolution des parts des consommations dépend de l'élasticité de substitution :

$$\frac{p_T C_T}{p_S C_S} = p^{1-\sigma}$$

Le progrès technique plus fort dans les biens technologiques va se traduire par une baisse de leur prix relatif mais par une augmentation de leur consommation relative. La question est de savoir quel effet l'emporte. Si l'élasticité de substitution est grande, à savoir supérieure à l'unité, les agents réagissent en substituant beaucoup les biens technologiques aux biens standard. L'effet volume l'emporte. La part de ces biens augmente.

L'hypothèse d'une élasticité de substitution égale à l'unité entre les biens consommés apparaît donc comme une condition nécessaire, mais pas forcément réaliste, pour qu'existe une croissance régulière.

5. On obtient

$$g_S = \gamma_S + \alpha_S g_S + \beta_S g_T + (1 - \alpha_S - \beta_S) n$$

ou

$$(1 - \alpha_S) g_S = \gamma_S + \beta_S g_T + (1 - \alpha_S - \beta_S) n$$

et

$$(1 - \beta_T) g_T = \gamma_T + \alpha_T g_S + (1 - \alpha_T - \beta_T) n$$

6. On en déduit

$$g_S = \frac{(1 - \beta_T) \gamma_S + \beta_S \gamma_T}{(1 - \beta_T) (1 - \alpha_S - \beta_S) + \beta_S (1 - \alpha_T - \beta_T)} + n$$

$$g_T = \frac{\alpha_T \gamma_S + (1 - \alpha_S) \gamma_T}{(1 - \beta_T) (1 - \alpha_S - \beta_S) + \beta_S (1 - \alpha_T - \beta_T)} + n$$

(Il y a plusieurs façons d'écrire le dénominateur. n intervient avec un coefficient égal à l'unité : on aurait pu écrire a priori le système en variables par tête et calculer directement $g_S - n$ et $g_T - n$)

Chaque taux de progrès technique a une influence positive sur les deux taux de croissance : diffusion du progrès technique dont l'intensité dépend des élasticités des fonctions de production.

Si $\sigma = 1$, la fonction d'utilité est Cobb-Douglas, du type $C_S^\phi C_T^\phi$. Le taux de croissance pertinent est celui de l'utilité, cad une moyenne pondérée des taux de croissance des deux secteurs.

7. On obtient

$$g_S = \frac{0,97\gamma_S + 0,03\gamma_T}{0,65} + n = 1,49\gamma_S + 0,046\gamma_T + n$$

$$g_T = \frac{0,32\gamma_S + 0,68\gamma_T}{0,65} + n = 0,49\gamma_S + 1,046\gamma_T + n$$

On remarque qu'il y a une sorte d'effet multiplicateur des progrès techniques. Les taux de croissance par tête dans chaque secteur sont des moyennes de γ_S et γ_T dont la somme des poids est supérieure à l'unité. Elle est égale à $1/0,65$. Ceci traduit la diffusion du progrès technique d'un secteur à l'autre.

On suppose nul le taux de croissance de la population.

Si $\gamma_S = \gamma_T = 0,8$, on obtient

$$g_S = g_T = \frac{1}{0,65}0,8 = 1,23\%$$

Il n'y a pas de biais du progrès technique. Les deux secteurs croissent au même taux. Le prix relatif des biens est constant.

On a

$$g_S = \gamma_S + \alpha_S g_S + \beta_S g_T$$

$$1,23 = 0,8 + 0,32 \cdot 1,23 + 0,03 \cdot 1,23 = 0,8 + 0,39 + 0,04$$

et idem pour g_T . La contribution du secteur High Tech est très faible.

8. Si $\gamma_S = 0,8$ et $\gamma_T = 5,8$, on obtient

$$g_S = 1,46 \quad g_T = 6,46$$

Le prix relatif des biens à haute technologie se réduit de 5% par an (cf le prix des ordinateurs). Les contributions sont données par les relations

$$1,46 = 0,8 + 0,32 \cdot 1,46 + 0,03 \cdot 6,46 = 0,8 + 0,47 + 0,19$$

$$6,46 = 5,8 + 0,32 \cdot 1,46 + 0,03 \cdot 6,46 = 5,8 + 0,47 + 0,19$$

Ce cas est plus réaliste. Malgré sa faible part dans la production des secteurs, le secteur à haute technologie contribue de manière non-négligeable à la croissance des secteurs, du fait de son fort taux de croissance.

Remarque : L'identité des fonctions de production dans les deux secteurs conduit à des résultats très particuliers. Le dénominateur des taux de croissance est égal à la part du travail

$1 - \alpha - \beta = 0,65$. Les numérateurs sont des moyennes pondérées des deux γ . La différence entre les deux taux de croissance est simplement l'écart entre les deux taux de progrès technique. Dans le cas général les répercussions seraient moins claires, mais du même type.

TD 3

Exercice 1 : L'interprétation des écarts internationaux de revenu par tête

1) On a $\text{Log } y = \alpha \text{Log } k^e$ et donc $\dot{y}^e/y^e = \alpha \dot{k}^e/k^e$. Il en résulte

$$g = \dot{y}/y = \dot{A}/A + \dot{y}^e/y^e = \gamma + \alpha (\dot{K}/K - \gamma - n)$$

$$g = 1,5 + 0,3(3 - 1,5 - 0,5) = 1,8\%$$

2a) Le point stationnaire est tel que $sf(k^e)/k^e = (\mu + n + \gamma)$ soit

$$k^e = \left(\frac{s}{\mu + n + \gamma} \right)^{1/(1-\alpha)}, \quad y^e = \left(\frac{s}{\mu + n + \gamma} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

Une hausse de s permet d'atteindre un niveau plus élevé de capital par tête et de revenu par tête.

Une hausse de n , à capacité d'épargne donnée, rend difficile l'équipement en capital des nouvelles générations. Elle conduit à une baisse de l'intensité capitaliste et du revenu par tête.

Si $s = 0,16$, on obtient $k^e = 3.2^{1/7} = 1.18$ et $y^e = 1.65$.

2b) On a

$$g_t = \gamma + \alpha \dot{k}_t^e/k_t^e = \gamma + \alpha [s(k_t^e)^{\alpha-1} - (\mu + n + \gamma)]$$

2c) Si $K/(AL) = k^e = 1$, $g = \gamma + \alpha(s - \mu - n - \gamma) = 0.015 + 0.3(0.16 - 0.05) = 0.048 = 4.8\%$ ainsi que $y/A = y^e = (k^e)^\alpha = 1$.

2d)

$\left(\frac{K}{AL}\right)_0$	$(y/A)_0$	g_0
1	1	4,8 %
2	1,23	2,95 %
3	1,39	2,22 %
4	1,52	1,82 %

On observe une relation décroissante entre le revenu par tête et le taux de croissance instantané. Ceci exprime la convergence absolue. Des pays structurellement identiques suivent la même trajectoire. Cette relation découle de la décroissance du rendement du capital. Un pays en retard a moins de capital par tête mais a une productivité du capital plus élevée et donc un rapport $I/K = S/K = \alpha Y/K$ plus élevé. Il croît plus vite, ce qui assure la convergence. L'écart relatif entre les revenus par tête tend vers zéro à long terme.

Remarque : comme le revenu par tête croît on est amené à calculer les niveaux de y/A et non ceux de y . Comme les pays ont le même A , cela permet de comparer les y .

3a) A long terme, k^e et y^e conservent les mêmes valeurs que précédemment. Elles dépendent de s mais pas de h .

On a $(y/A)^* = hy^{e*}$. L'effet de s reste le même. h a un effet proportionnel sur le revenu par tête de long terme. Un pays deux fois plus efficace a un revenu par tête deux fois plus élevé (mais le même taux de croissance)

3b) On a

$$g_0 = \gamma + \alpha [s(k_0^e)^{\alpha-1} - (\mu + n + \gamma)]$$

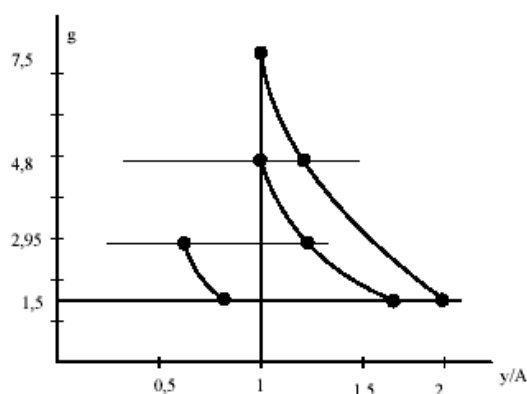
$$= \gamma + \alpha \left[s \left(\frac{1}{h} \frac{K_0}{A_0 L_0} \right)^{\alpha-1} - (\mu + n + \gamma) \right]$$

Le niveau de capital humain h a un effet positif, à court terme, sur la croissance. A court terme, le capital est donné, la fonction de production $Y = K^\alpha (hAL)^{1-\alpha}$ met en évidence l'élasticité $1 - \alpha$. A long terme, le capital s'adapte au niveau de h (un pays ayant un h plus élevé devra avoir plus accumulé). Le taux de croissance prend sa valeur naturelle γ , indépendante de h .

Si $s = 0,16$, $h = 0,5$ et $K_0/(A_0 L_0) = 2$, on a $k_0^e = 1$ et on retrouve le taux de croissance 4,8% déjà rencontré. Le niveau de y_0/A_0 est $hf(k_0^e) = h = 0,5$.

3c)

s	h	$K_0/(A_0 L_0)$	y_0/A_0	g_0	$(y/A)^*$
0,16	1	1	1	4,8 %	1,65
0,16	1	2	1,23	2,95 %	1,65
0,25	1	1	1	7,5 %	1,99
0,25	1	1,89	1,21	4,8 %	1,99
0,16	0,5	1	0,62	2,95 %	0,82
0,16	0,5	2	0,5	4,8 %	0,82



3d) On ne discerne plus de relation entre revenu par tête et taux de croissance. Des pays ont le même taux de croissance alors qu'ils n'ont pas le même revenu. Inversement, d'autres pays ont le même revenu mais pas le même taux de croissance.

Pour y voir clair, il faut d'abord distinguer l'influence de s et h sur le sentier de long terme.

Le taux d'épargne influence positivement le revenu par tête de long terme. Idem pour h qui a un effet proportionnel. Si h double quand $s = 0.16$ le revenu double en passant de 0,82 à 1,65.

Ensuite, pour s et h donnés, on observe une convergence. Chaque pays converge vers son propre sentier stationnaire. C'est la convergence conditionnelle.

Deux pays structurellement différents ont le même taux de croissance s'ils sont à la même distance de leur propre sentier stationnaire. Les écarts de revenu par rapport à la cible de long terme sont égaux : $1.65/1 = 1.99/1.21$ et $1.65/1.23 = 0.82/0.62 = 1.33$.

On peut expliciter la relation entre croissance et écart de revenu (non-demandé):

$$\begin{aligned} g &= \gamma + \alpha [s(k^e)^{\alpha-1} - (\mu + n + \gamma)] = \gamma + \alpha [s(y^e)^{(\alpha-1)/\alpha} - (\mu + n + \gamma)] \\ &= \gamma + \alpha(\mu + n + \gamma) \left[\left(\frac{y^e}{y^{e*}} \right)^{(\alpha-1)/\alpha} - 1 \right] \\ &= \gamma + \alpha(\mu + n + \gamma) \left[\left(\frac{y/A}{(y/A)^*} \right)^{(\alpha-1)/\alpha} - 1 \right] \end{aligned}$$

Elle ne fait intervenir ni s ni h et vaut donc pour tous les pays.

Exercice 2 : le modèle de Solow avec progrès technique

1) $\dot{K} = sF(K, AL) - \delta K = sALf(k) - \delta K$ avec $k = \frac{K}{AL}$. Donc $\dot{K}/K = sf(k)/k - \delta$.
 $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L} = s\frac{f(k)}{k} - (\gamma + n + \delta)$ d'où :

$$\dot{k} = sf(k) - (\gamma + n + \delta)k = sk^\alpha - (\gamma + n + \delta)k$$

2) \bar{k} est tel que $s\frac{f(\bar{k})}{\bar{k}} = \gamma + n + \delta$, c'est-à-dire $\bar{k} = \left(\frac{s}{\gamma+n+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Sur le sentier de croissance régulière, Y , K et C croissent au taux $\gamma + n$.

La productivité moyenne du travail, Y/L , croît donc au taux γ , la productivité moyenne du capital, Y/K , est constante, le salaire réel, $w = (1 - \alpha)K^\alpha A^{1-\alpha} L^{-\alpha} = (1 - \alpha)\frac{Y}{L}$, croît au taux γ et le taux d'intérêt réel, $r = \alpha K^{\alpha-1} (AL)^{1-\alpha} = \alpha\frac{Y}{K}$, est constant.

En définitive, sur le sentier de croissance régulière, on a

$$1 = w\frac{L}{Y} + r\frac{K}{Y}$$

où w croît au taux γ , L/Y décroît au taux γ , r et K/Y sont constants.

3) Le coefficient de capital est $v = \frac{K}{Y} = \frac{K}{ALf(k)} = \frac{k}{f(k)} = k^{1-\alpha}$.

On a donc $\frac{\dot{v}}{v} = (1 - \alpha)\frac{\dot{k}}{k}$ d'où

$$\dot{v} = (1 - \alpha) (sk^{\alpha-1} - (\gamma + n + \delta))v = (1 - \alpha) (s - (\gamma + n + \delta))k^{1-\alpha}$$

soit finalement :

$$\dot{v} = (1 - \alpha)s - (1 - \alpha)(\gamma + n + \delta)v$$

La solution stationnaire de cette équation différentielle linéaire du premier ordre en v est $\bar{v} = \frac{s}{\gamma+n+\delta}$. La solution générale est alors :

$$v_t = \bar{v} + (v_0 - \bar{v}) e^{-(1-\alpha)(\gamma+n+\delta)t}$$

$\beta = (1 - \alpha)(\gamma + n + \delta)$ est la vitesse de convergence vers l'état stationnaire.

4) La production par tête est $\tilde{y} = \frac{Y}{L} = Af(k) = Ak^\alpha = Av^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.

On a donc $\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\dot{v}}{v} = \gamma + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\dot{v}}{v}$.

Le capital par tête est $K/L = Ak = Av^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Si l'économie part d'un bas niveau de capital par tête, elle part donc d'un v faible ; alors, v va croître vers sa valeur de long terme \bar{v} : $\frac{\dot{v}}{v} > 0$. On aura donc $\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} > \gamma$: la production par tête va initialement croître à un taux supérieur à γ , le taux de croissance du progrès technique.

On a

$$\ln \tilde{y}_t = \ln A + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln v_t = \ln A_0 + \gamma t + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln v_t$$

En $t = 0$, $\ln \tilde{y}_0 = \ln A_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln v_0$. On a représenté sur la figure 1 le cas où $v_0 = \bar{v}$ c'est-à-dire le cas où v est directement à sa valeur de long terme, le cas où $v_0 = v_0^1 < \bar{v}$ (capital par tête initial trop faible) et les trajectoires de $\ln \tilde{y}_t$ correspondantes. La deuxième trajectoire converge vers la première. On a également représenté le cas où $v_0 = v_0^2 < v_0^1$ (capital par tête initial encore plus faible) : l'écart entre les deux dernières trajectoires tend vers zéro. Une économie en retard (c'est-à-dire ayant initialement moins de capital) rattrape l'autre.

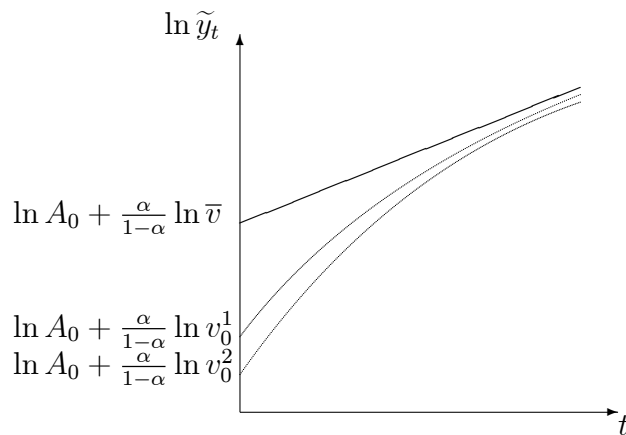


figure 1

5) Si s varie, $\bar{v} = \frac{s}{\gamma+n+\delta}$ varie. On a représenté sur la figure 2 le cas où s augmente (au taux d'épargne s_1 correspond le coefficient de capital stationnaire \bar{v}_1 et au taux d'épargne $s_2 > s_1$ le coefficient \bar{v}_2). Une hausse du taux d'épargne augmente initialement le taux de croissance de l'économie mais n'a pas d'effet durable sur celui-ci, qui revient à long terme au taux naturel.

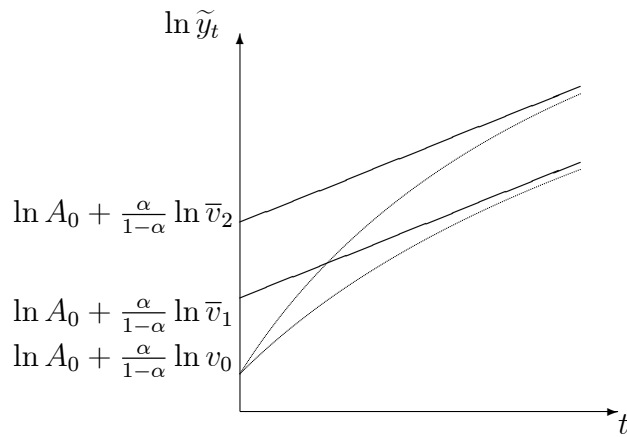


figure 2

6) On a, par définition de \bar{c} et avec la condition de stationnarité sur \bar{k} :

$$\bar{c} = (1 - s) f(\bar{k}) = \bar{k}^\alpha - s\bar{k}^\alpha = \bar{k}^\alpha - (\gamma + n + \delta)\bar{k}$$

On constate donc que \bar{c} est une fonction concave de \bar{k} , qui est maximale lorsque :

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{k}} = 0 \Leftrightarrow \bar{k} = \bar{k}^* = \left(\frac{\alpha}{\gamma + n + \delta} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

En outre, on a en ce point :

$$\frac{\partial f(\bar{k})}{\partial \bar{k}} = \alpha \bar{k}^{\alpha-1} = \gamma + n + \delta \Leftrightarrow \frac{\partial f(\bar{k})}{\partial \bar{k}} - \delta = \gamma + n$$

Le rendement marginal net (de la dépréciation) du capital en unités de travail efficace est égal au taux de croissance de l'économie. C'est la *règle d'or d'accumulation du capital*.

7) \bar{k} est une fonction strictement croissante de s . Il existe donc un unique taux d'épargne s^* assurant que le stock de capital en unités de travail efficace de long terme est optimal, et vaut \bar{k}^* . Ce taux d'épargne maximise évidemment la consommation en unités de travail efficace (et donc la consommation par tête) de long terme.

On a vu qu'un effort d'épargne supplémentaire augmentait toujours le revenu par tête de long terme. Cependant, trop d'épargne nuit à la consommation par tête, qui est une meilleure mesure du bien-être que le revenu par tête. Ainsi, un effort d'épargne supérieur à s^* conduit à une *suraccumulation* inefficace, et réduit la consommation par tête de long terme.

Exercice 3 : éducation et croissance

1) On a $k = K/hL$ et $Y/hL = f(k) = k^\alpha$ d'où :

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{hL} - nk = sf(k) - nk = sk^\alpha - nk$$

On retrouve la même équation que dans le modèle de Solow sans progrès technique. A long terme, k^* est solution de

$$sf(k)/k = n \iff sk^{\alpha-1} = n$$